BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Я.Т.МЕГРАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе доказано существование и единственность классического решения одной нелокальной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_{tt}(x,t)-u_{ttxx}(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t),$$
$$(x,t)\in D_T=\{(x,t):0\le x\le 1, 0\le t\le T\}, \tag{1}$$
$$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=u_x(1,t), 0\le t\le T, \tag{2}$$
$$\begin{gathered} u(x,0)+\delta u(x,T)=\varphi(x), \\ u_t(x,0)+\delta u_t(x,T)=\psi(x), 0\le x\le 1, \end{gathered} \tag{3}$$

где δ -заданное число, $\varphi(x),\psi(x),f(x,t)$ -заданные функции, а $u(x,t)$ - искомая функция, причем под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(x,t)$, непрерывную в замкнутой области D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

Теорема единственности. Если $\delta\ne\pm 1$, то задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

Доказательство. Допустим, что существуют два решения рассматриваемой задачи:

$$u_1(x,t),\ u_2(x,t)$$

и рассмотрим разность $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$.

Функция $v(x,t)$, очевидно, что удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt}(x,t)-v_{ttxx}(x,t)-v_{xx}(x,t)=0 \tag{4}$$

и условиям:

$$v(0,t)=v(1,t), v_x(0,t)=v_x(1,t),\ 0\le t\le T, \tag{5}$$
$$v(x,0)+\delta v(x,T)=0, v_t(x,0)+\delta v_t(x,T)=0, 0\le x\le 1. \tag{6}$$

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю.

Умножим обе части уравнения (4) на функцию $2v_t(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до 1 :

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx - 2\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx - 2\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx = 0\,. \quad (7)$$

Пользуясь граничными условиями (5) имеем:

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx;$$

$$2\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx = 2(v_{ttx}(1,t)v_t(1,t) - v_{ttx}(0,t)v_t(0,t)) -$$

$$-2\int_0^1 v_{ttx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx = -\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx;$$

$$2\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx = 2(v_x(1,t)v_t(1,t) - v_x(0,t)v_t(0,t)) -$$

$$-2\int_0^1 v_x(x,t)v_{tx}(x,t)dx = -\frac{d}{dt}\int_0^1 v_x^2(x,t)dx.$$

Тогда, из (7) имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 v_x^2(x,t)dx = 0$$

или

$$y(t) \equiv \int_0^1 v_t^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx + \int_0^1 v_x^2(x,t)dx = C\,.$$

Отсюда, с учетом (6), получаем:

$$y(0) - \delta^2 y(T) = \int_0^1 (v_t^2(x,0) - \delta^2 v^2(x,T))dx +$$

$$+\int_0^1 (v_{tx}^2(x,0) - \delta^2 v_{tx}^2(x,T))dx + \int_0^1 (v_x^2(x,0) - \delta^2 v_x(x,T))dx = 0.$$

Таким образом,

$$y(0) - \delta^2 y(T) = C(1-\delta^2) = 0.$$

Так как $\delta \neq \pm 1$, то $C = 0$. Следовательно,

$$\int_0^1 v_t^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx + \int_0^1 v_x^2(x,t)dx \equiv 0\,.$$

Отсюда, заключаем, что

$$v_t(x,t) \equiv 0, v_x(x,t) \equiv 0,$$

откуда и следует тождество

$$v(x,t) = const = C_0.$$

Пользуясь нелокальным условиям (6), имеем:

$$v(x,0) + \delta v(x,T) = C_0(1+\delta) = 0.$$

Следовательно, $C_0 = 0$, ибо $\delta \neq -1$.

Тем самым доказано, что

$$v(x,t) \equiv 0.$$

Таким образом, если существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1)-(3), то $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. Отсюда следует, что если решение задачи (1)-(3) существует, то оно единственное. Теорема доказана.

Рассмотрим спектральную задачу:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, 0 \le x \le 1, \tag{8}$$

$$X(0) = X(1), X'(0) = X'(1). \tag{9}$$

Известно [2], что собственные числа задачи (8), (9) состоят из чисел $\lambda_k = 2\pi k$ $(k = 0,1,2,...)$, причем при $k \ge 1$ каждому собственному значению λ_k соответствуют две линейно-независимые собственные функции $\cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x$; кроме того, система

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, ..., \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, ...$$

образует в $L_2(0,1)$ ортогональный базис.

Классическое решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x, \tag{10}$$

где

$$u_{1k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \ (k = 0,1,2,...),$$

$$u_{2k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \ (k = 1,2,...).$$

Применяя формальный метод Фурье, из (1)- (3) получаем:

$$(1+\lambda_k^2) u''_{1k}(t) + \lambda_k^2 u_{1k}(t) = f_{1k}(t) \ \ (k = 0,1,2,...), \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_{1k}(0) + \delta u_{1k}(T) = \varphi_{1k}, \ \ (k = 0,1,2,...), \\ &u'_{1k}(0) + \delta u'_{1k}(T) = \psi_{1k} \quad (k = 0,1,2,...), \end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$(1+\lambda_k^2) u''_{2k}(t) + \lambda_k^2 u_{2k}(t) = f_{2k}(t) \ \ (k = 1,2,...), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &u_{2k}(0)+\delta u_{2k}(T)=\varphi_{2k} \quad (k=1,2,...), \\ &u'_{2k}(0)+\delta u'_{2k}(T)=\psi_{2k} \quad (k=1,2,...), \end{aligned} \quad , \tag{14}$$

где

$$\varphi_{1k}=2\int_0^1 \varphi(x)\cos\lambda_k x dx,\ \psi_{1k}=2\int_0^1 \psi(x)\cos\lambda_k x dx\ ,\ (k=0,1,...)$$

$$f_{1k}(t)=2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx\ \ (k=0,1,2,...)\ ,$$

$$\varphi_{2k}=2\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_k x dx,\ \psi_{21k}=2\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_k x dx\ \ (k=1,2,...)\ ,$$

$$f_{2k}(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x dx\ \ (k=1,2,...)\ .$$

Из (11)-(14) имеем:

$$u_{10}(t)=(1+\delta)^{-1}\left\{\varphi_{10}+(t-(1+\delta)^{-1}\delta T)\psi_{10}-\delta\int_0^T (T(1-\delta(1+\delta)^{-1})+t-\tau)f_{10}(\tau)\right\}+$$

$$+\int_0^t (t-\tau)f_{10}(\tau)d\tau, \tag{15}$$

$$u_{ik}(t)=\frac{1}{\beta_k\rho_k(T)}\{\beta_k(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\varphi_{ik}+(\sin\beta_k t-\delta\sin\beta_k(T-t))\psi_{ik}-$$

$$\left.-\frac{\delta}{1+\lambda_k^2}\int_0^T f_{ik}(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau)+\delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t f_{ik}(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau \quad i=1,2,\quad (k=1,2,...), \tag{16}$$

где

$$\beta_k=\frac{\lambda_k^2}{\sqrt{1+\lambda_k^2}},\rho_k(T)=1+\delta\cos\beta_k T+\delta^2\ \ (k=1,2,...)\ .$$

Очевидно, что

$$u'_{ik}(t)=\frac{1}{\rho_k(T)}\{\beta_k(-\sin\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\varphi_{ik}+(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\psi_{ik}-$$

$$\left.-\frac{\delta}{1+\lambda_k^2}\int_0^T f_{ik}(\tau)(\cos\beta_k(T+t-\tau)+\delta\cos\ \beta_k(t-\tau))d\tau\right\}+$$

$$+\frac{1}{1+\lambda_k^2}\int_0^t f_{ik}(\tau)\cos\beta_k(t-\tau)d\tau \quad i=1,2, \quad k=1,2,\ldots \quad , \tag{17}$$

$$u''_{ik}(t)=\frac{1}{1+\lambda_k^2}f_{ik}(t)-\frac{\beta_k}{\rho_k(t)}\{\beta_k(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\psi_{ik}+$$
$$+(\sin\beta_k t-\delta\sin\beta_k(T-t))\psi_k-$$
$$\left.-\frac{\delta}{1+\lambda_k^2}\int_0^T f_{ik}(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau)+\delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right\}-$$
$$-\frac{\beta_k}{1+\lambda_k^2}\int_0^t f_{ik}(\tau)(\sin\beta_k(t-\tau)d\tau \quad i=1,2, \quad k=1,2,\ldots \; , \tag{18}$$

$$u'_0(t)=(1+\delta)^{-1}(\psi_{10}-\delta\int_0^T f_{10}(\tau)d\tau)+\int_0^t f_{10}(\tau)d\tau \; . \tag{19}$$

Теорема 2. Пусть $\delta\neq-1$ и

1. $\varphi(x)\in C^2[0,1], \varphi^{(3)}(x)\in L_2(0,1)$ и
   $\varphi(0)=\varphi(1), \varphi'(0)=\varphi'(1), \varphi''(0)=\varphi''(1)$.
2. $\psi(x)\in C^2[0,1], \psi^{(3)}(x)\in L_2(0,1)$ и
   $\psi(0)=\psi(1), \psi'(0)=\psi'(1), \psi''(0)=\psi''(1)$.
3. $f(x,t)\in C(D_T), \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\in L_2(D_T)$ и $f(0,t)=f(1,t)$.

Тогда, функция

$$u(x,t)=(1+\delta)^{-1}\left\{2\int_0^1\varphi(x)dx+2(t-\delta(1+\delta)^{-1}T)\int_0^1\psi(x)dx+\right.$$
$$\left.-2\delta\int_0^T\int_0^1(T(1-\delta(1+\delta)^{-1})+t-\tau)f(x,t)dxdt\right\}+2\int_0^t\int_0^1(t-\tau)f(x,t)dxd\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\beta_k\rho_k(T)}\{\beta_k(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\varphi_{1k}+(\sin\beta_k t-\delta\sin\beta_k(T-t))\psi_{1k}-\right.$$
$$\left.-\frac{\delta}{1+\lambda_k^2}\int_0^T f_{1k}(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau)+\delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right\}+$$
$$\left.+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t f_{1k}(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\cos\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\beta_k\rho_k(T)}\{\beta_k(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\varphi_{2k}+(\sin\beta_k t-\delta\sin\beta_k(T-t))\psi_{2k}-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta}{1+\lambda_k^2}\int_0^T f_{2k}(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau)+\delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right\}+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t f_{2k}(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\sin\lambda_k x \qquad (20)$$

является классическим решением задачи (1)-(3).

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$(1/\sqrt{2})<\beta_k<1,\ |\rho_k(T)|\ge 1+\delta^2-|\delta|\equiv 1/\rho.$$

Учитывая эти, из (16), (17), (18), соответственно, находим:

$$|u_{ik}(t)|\le\sqrt{2}\rho(1+|\delta|)(|\varphi_{ik}|+|\psi_{ik}|)+\sqrt{2}(1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\sqrt{T}\lambda_k^{-2}(\int_0^T|f_{ik}(\tau)|^2d\tau)^{1/2}\ (i=1,2),$$

$$|u'_{ik}(t)|\le\rho(1+|\delta|)(|\varphi_{ik}|+|\psi_{ik}|)+(1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\sqrt{T}\lambda_k^{-2}(\int_0^T|f_{ik}(\tau)|^2d\tau)^{\frac{1}{2}}\ (i=1,2),$$

$$|u''_{ik}(t)|\le\lambda_k^{-2}|f_{ik}(t)|+\rho(1+|\delta|)(|\varphi_{ik}|+|\psi_{ik}|)+$$

$$+(1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\sqrt{T}\lambda_k^{-2}(\int_0^T|f_{ik}(\tau)|^2d\tau)^{1/2}\ (i=1,2).$$

Отсюда имеем:

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}\le\sqrt{6}\rho(1+|\delta|)(\|\varphi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)})+$$
$$+\sqrt{6}(1+\rho|\delta|(1+|\delta|)\sqrt{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\quad(i=1,2), \qquad (21)$$

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}\le\sqrt{3}\rho(1+|\delta|)(\|\varphi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)})+$$
$$+\sqrt{3}(1+|\delta|(1+|\delta|)\rho)\sqrt{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\quad(i=1,2), \qquad (22)$$

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{ik}^3\|u''_k(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}\le 2\left\|\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right\|_{L_2(0,1)}\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+2(1+|\delta|\rho(1+|\delta|)\sqrt{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\qquad(i=1,2). \qquad (23)$$

Далее, из (15) и (19), соответственно, получаем:

$$|u_{10}(t)| \le |1+\delta|^{-1}(\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T(1+|\delta||1+\delta|^{-1}|\delta|)\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}) +$$
$$+T\sqrt{T}(2+|\delta|(3+|\delta||1+\delta|^{-1}))\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \qquad (24)$$
$$\|u_0'(t)\| \le |1+\delta|^{-1}\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T}(1+|\delta||1+\delta|^{-1})\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}. \qquad (25)$$

Очевидно, что

$$|u(x,t)| \le \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-6})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \qquad (26)$$
$$|u_t(x,t)| \le \|u_0'(t)\|_{C[0,T]+}(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-6})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}'(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \qquad (27)$$
$$|u_{tt}(x,t)| \le \|u_0''(t)\|_{C[0,T]+}(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-6})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}''(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \qquad (28)$$
$$|u_{xx}(x,t)| \le (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}, \qquad (29)$$
$$|u_{ttxx}(x,t)| \le (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2})^{1/2}\sum_{i=1}^{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}. \qquad (30)$$

Из (26)-(30), с учетом (21)-(25), следует, что функции $u(x,t), u_t(x,t)$, $u_{tt}(x,t), u_{xx}(x,t), u_{ttxx}(x,t)$ непрерывны в D_T. Непосредственной проверкой легко видеть, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3) в обычном смысле. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габов С.А., Оразов В.Б. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u_{xx}-u]+u_{xx}=0$ и некоторых связанных с ним задачах. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1986, т. 26, №1, с. 92-102.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. Москва 1972.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. том V, Москва, 1957.

PERİODİK SƏRHƏD ŞƏRTLİ DÖRDÜNCÜ TƏRTİB XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Y.T.MEHRƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə dördüncü tərtib psevdohiperbolik tənlik üçün bir qeyri-lokal sərhəd məsələsinin klassik həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunmuşdur.

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FORTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARTIAL DERIVATIVES WITH PERIODICAL BOUNDARY CONDITIONS

Y.T.MEHRALIYEV

SUMMARY

In this work the existence and uniqueness of classic solution of a nonlocal boundary value problem for forth order pseudohyberbolic equation.